УДК 621.642.39 doi: 10.20998/2078-7405.2019.90.17

Ю.М. Хомяк, канд. техн. наук,
І.А. Ярова, канд. техн. наук, Одеса, Україна

РОЗРАХУНОК ВИГИНУ ПЛАСТИНИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ФУНКЦІЙ УІТТЕКЕРА

Анотація. *В роботі розглянуто перспективний напрямок модернізації конструкцій вертикальних циліндричних судин шляхом оптимізації форми їх конструктивних елементів. Зниження матеріаломісткості та зменшення внутрішніх напружень досягається заміною плоских днищ судин днищами із плавно-змінною товщиною, які при розрахунку розглядаються як круглі пластини. У статті запропоновано аналітичний метод рішення задачі вигину круглої пластини із змінною товщиною із застосуванням функцій Уіттекера. Одержано точне рішення задачі для вісесиметрично навантаженої пластини, товщина якої змінюється за експоненціальним законом. Проведено аналіз рішень задачі при різних значеннях характеристики нерівномірності товщини пластини.*

Ключові слова: *кругла пластина, змінна товщина, вісесиметричне навантаження, вигин.*

Вступ

Днища циліндричних судин і резервуарів, ротори турбін, фланцеві з'єднання і затвори апаратів високого тиску мають форму круглих або кільцевих пластин. Актуальним завданням сучасного машинобудування є модернізація їх конструкцій і розробка методів розрахунку на міцність. Перспективним напрямком модернізації є оптимізація форми пластинчастих елементів конструкцій, яка полягає в перерозподілі використаного матеріалу з метою зменшення внутрішніх напружень. Таким чином, вибір в якості днищ судин пластин змінної товщини є більш перспективним напрямком у порівнянні із пластинами постійної товщини. В апаратобудуванні розглядають конструкції круглих пластин з плавно-змінною і ступінчасто-змінною товщиною. В теорії пластин існує два класи методів розрахунку подібних елементів: аналітичні і чисельні методи. Розв'язання задач чисельними методами потребує створення складних математичних моделей із урахуванням значної кількості факторів і припущень [1-3]. Аналітичні методи розрахунку [4-7] дозволяють одержувати більш узагальнені рішення, які можуть бути перетворені у форми, зручні для практичного використання.
Однак поширені інженерні методики, що розроблені на базі аналітичних методів, зазвичай використовують гіпергеометричні функції, які потребують громіздких розрахунків і в даний час можуть вважатися в певній мірі морально застарілими [8].

Мета роботи

Метою даної роботи є одержання точного розв’язку задачі вигину круглих пластин змінної товщини аналітичним методом розрахунку із застосуванням апарату спеціальних функцій. У якості спеціальних функцій доцільним є використання функцій Уіттекера. Для дослідження обрано днища судин, які мають вигляд круглих пластин, товщина яких зменшується або зростає в радіальному напрямку за експоненційним законом.

Викладення основного матеріалу

Об’єктом дослідження є вертикальні судини із днищами, що мають змінну товщину. Предмет дослідження: днища змінної товщини, виготовлені методом штампування або лиття. Матеріал судин в цілому і днищ зокрема – вуглецева або низьколегована сталь.

Розглянемо днище вертикальної судини як жорстко закріплену пластину із змінною товщиною $\delta(r)$. Вважаємо, що товщина пластини змінюється в радіальному напрямку за функцією Гауса:

$$\delta(r) = \delta_0 \exp\left(-\frac{\beta r^2}{6a^2}\right), \tag{1}$$

де β – характеристика нерівномірності товщини пластини; δ_0 – товщина пластини в її центрі.

Вважаємо, що товщина пластини не змінюється в коловому напрямку. Закріплення пластини у коловому напрямку є однаковим і незмінним. На пластину діє рівномірно розподілене поперечне навантаження $q(r)$. Оскільки розподіл навантаження не змінюється в коловому напрямку, прогин її серединної поверхні також буде функцією лише радіальної координати $w(r)$. Таким чином, ми одержимо вісесиметричну деформацію пластини. Для пластини із товщиною, що змінюється у радіальному напрямку, прогин $w(r)$ буде також вісесиметричним.

Розглянемо сукупність точок A, розташованих на відстані r від центру пластини. Для навантаженої пластини радіус кривини зігнутої серединної поверхні у радіальному напрямку ρ_1 буде відрізнятися від радіусу кривини серединної поверхні у коловому напрямку ρ_2 (рис. 1). Кут нахилу серединної поверхні $\varphi(r)$ пов’язаний з прогином $w(r)$ та радіусами кривини залежностями:

$$\frac{1}{\rho_1} = k_1 = \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{d^2 w}{dr^2} \tag{2}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = k_2 = \frac{\varphi}{r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \tag{3}$$

де k_1 та k_2 – кривини серединної поверхні відповідно у радіальному та коловому напрямках.

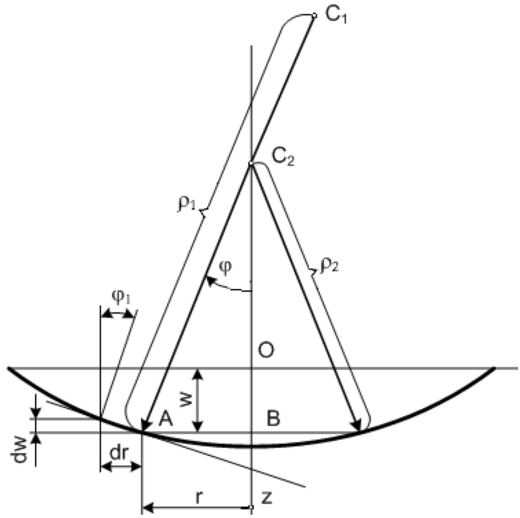

Рисунок 1 – Геометричні характеристики серединної поверхні навантаженої круглої пластини

Оскільки товщину пластини δ(r) та навантаження q(r) вважаємо незмінними у коловому напрямку, форма зігнутої серединної поверхні є вісесиметричною. Диференційне рівняння вісесиметричного прогину круглої пластини змінної товщини δ(r) має вигляд

$$D\nabla^2\nabla^2 w+\frac{dD}{dr}\left(2\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{2+\mu}{r}\cdot\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{dw}{r^2dr}\right)+\frac{d^2D}{dr^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)=q(r), \quad (4)$$

де D – циліндрична жорсткість пластини; μ – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; r – радіальна координата.

В даному рівнянні використовуємо диференційний оператор

$$\nabla^2 w=\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr} \quad (5)$$

де q(r) – зовнішнє поперечне навантаження; w(r) – прогин пластини.

Вважаємо навантаження і прогин позитивними у випадку, коли вони спрямовані донизу. При змінній товщині пластини її циліндрична жорсткість також є функцією радіальної координати:

$$D = \frac{E\delta^3(r)}{12(1-\mu^2)} \tag{6}$$

де μ, E – коефіцієнт Пуассона і модуль пружності – механічні характеристики матеріалу пластини, які вважаємо постійними.

При навантаженні пластини виникають наступні внутрішні зусилля:

– радіальний згинальний момент:

$$M_r(r) = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right) = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu\frac{\varphi}{r}\right); \tag{7}$$

– обводовий згинальний момент:

$$M_\phi(r) = -D\left(\mu\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right) = D\left(\frac{\varphi}{r} + \mu\frac{d\varphi}{dr}\right); \tag{8}$$

– радіальна поперечна сила:

$$Q_r(r) = -D\frac{d(\nabla^2 w)}{dr} - \frac{dD}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right). \tag{9}$$

Введемо безрозмірну радіальну координату x:

$$x = \frac{r}{a}, \tag{10}$$

де a – радіус зовнішнього контуру пластини.

Тоді залежність, що описує змінність товщини пластини в радіальному напрямку (1), приймає вигляд

$$\delta(x) = \delta_0 \exp\left(-\frac{\beta x^2}{6}\right), \tag{11}$$

Використання параметра β – характеристики нерівномірності товщини пластини – надає можливість описати функцією (11) форму пластин, товщина яких зменшується або зростає у радіальному напрямку за нелінійною залежністю. В нашому випадку – плоско-опуклих і плоско-увігнутих. Цією ж функцією можливо описати двоопуклі і двоввігнуті пластини: для цього необхідно відкладати в обидва боки від серединної поверхні ординату $\delta(x)/2$.

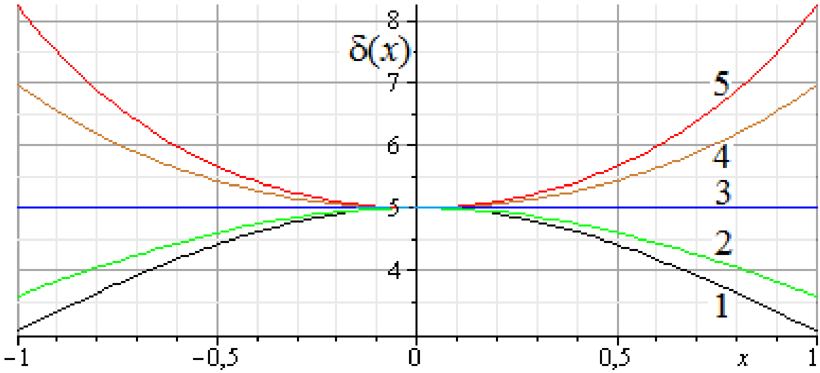

Рисунок 2 – Характер залежності товщини пластини від параметру β:
1) β = 3; 2) β = 2; 3) β = 0; 4) β = -2; 5) β = -3

В якості прикладу показано залежності товщини пластини для різних значень характеристики нерівномірності товщини пластини β при товщині пластини в її центрі δ_0 = 5 мм (рис. 2).

Товщина пластини на її контурі суттєво залежить від величини параметра β . Залежність товщини пластини на контурі при товщині пластини в центрі δ_0 = 5 мм показано на рис. 3. Зазначимо, що при рівних за абсолютною величиною параметрах β товщина пластини зростає при позитивних значеннях β інтенсивніше, ніж зменшується при негативних значеннях β.

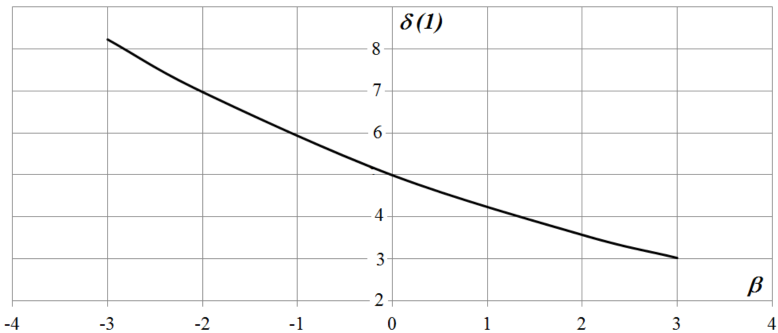

Рисунок 3 – Залежність товщини пластини на контурі від параметра β

Диференційне рівняння четвертого порядку (4), що описує вісесиметричні прогини круглої пластини змінної товщини, зводимо до рівняння другого порядку відносно кута повороту нормалі до серединної поверхні *φ(x)*. З урахуванням експоненційной залежності зміни товщини пластини (11), а також залежностей для куту нахилу серединної поверхні (2) і (3) одержимо рівняння прогинів круглої пластини:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}-\beta x\right)\frac{d\varphi}{dx}-\left(\frac{1}{x^2}+\mu\beta\right)\varphi=-px\exp\left(\frac{\beta x^2}{2}\right), \qquad (12)$$

В одержаному рівнянні p – загальна безрозмірна характеристика матеріалу, розмірів та навантаження пластини:

$$p=6\left(1-\mu^2\right)\frac{q_0 a^3}{E\delta_0^3}, \qquad (13)$$

де q_0 – інтенсивність рівномірно розподіленого навантаження.

За загальноприйнятою методикою повний розв’язок рівняння (12) має вигляд степеневого ряду із досить складною структурою [5]. Оскільки однорідне рівняння (12) має другий порядок, його загальний розв’язок повинний виглядати як фундаментальна система рішень, складена з двох лінійно-незалежних функцій. Для спрощення вигляду розв’язку лінійно-незалежні функції представимо у вигляді добутків елементарних функцій і функцій Уіттекера $M_{k,\gamma}(z)$ та $W_{k,\gamma}(z)$:

$$F_1(x)=x^{-1}\exp\left(\frac{\beta x^2}{4}\right)\cdot M_{k,\gamma}\left(\frac{\beta x^2}{2}\right),$$

$$F_2(x)=x^{-1}\exp\left(\frac{\beta x^2}{4}\right)\cdot W_{k,\gamma}\left(\frac{\beta x^2}{2}\right).$$

Загальний розв’язок однорідного рівняння (12) має вигляд:

$$\varphi_*(x)=x^{-1}\exp\left(\frac{\beta x^2}{4}\right)\left[C_1 M_{k,\gamma}\left(\frac{\beta x^2}{2}\right)+C_2 W_{k,\gamma}\left(\frac{\beta x^2}{2}\right)\right] \qquad (15)$$

де $k=\dfrac{1-\mu}{2}$, $\gamma=\dfrac{1}{2}$ – параметри функцій Уіттекера; C_1 та C_2 – довільні константи.

Частинний розв’язок рівняння (12) для заданої правої частини:

$$\varphi_0=-\frac{px}{(3-\mu)\beta}\exp\left(\frac{\beta x^2}{2}\right). \qquad (16)$$

Повний розв’язок неоднорідного диференційного рівняння (12) є сумою загального і частинного розв’язків (14) і (16):

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_*(x). \qquad (17)$$

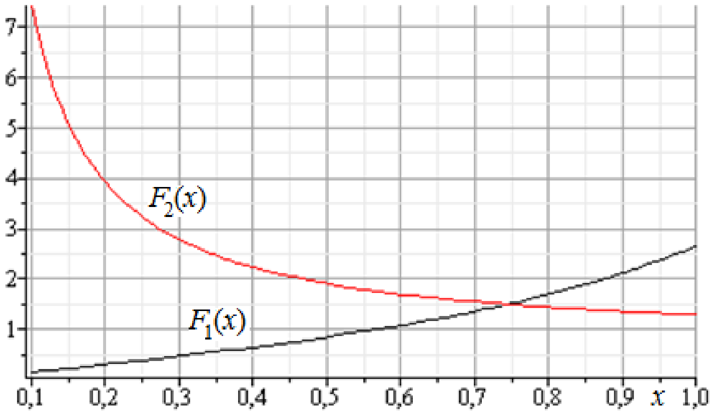

Рисунок 4 – Власні функції диференційного рівняння прогину круглої пластини змінної товщини при μ = 0,3 і β = 3

Довільні константи C_1 та C_2 визначаємо із граничних умов для функції *φ(x)*. Встановлено, що у досліджуваному діапазоні аргументу $0 \le x \le 1$ перша з власних функцій $F_1(x)$ є обмеженою, друга власна функція $F_2(x)$ необмежено зростає при $x \to 0$ (рис. 4). Введемо граничну умову: кут повороту в центрі пластини дорівнює нулю:

$$\varphi(x)\big|_{x=0} = 0 \tag{18}$$

При виконані даної умови друга константа дорівнює нулю: $C_2 = 0$. Крим того, при будь-яких значеннях коефіцієнта Пуассона лінійно-незалежна функція F_1 в центрі пластини також дорівнює нулю:

$$F_1(x)\big|_{x=0} = 0 \tag{19}$$

Відомо, що для ізотропних матеріалів значення коефіцієнту Пуассона лежить в діапазоні $0 < \mu < 0,5$. Тому для довільної величини μ значення лінійно-незалежної функції $F_1(x)$ розташовані у проміжку, обмеженому кривими 1 та 2 (рис. 5). Встановлено, що умова (19) виконується для всіх кінцевих значень параметру β, тобто для будь-якої характеристики нерівномірності товщини круглої пластини (рис. 6). Таким чином доведено, що для будь-якої характеристики нерівномірності товщини круглої пластини функція $F_1(x)$ в центрі пластини дорівнює нулю і приймає найбільше значення на її контурі.

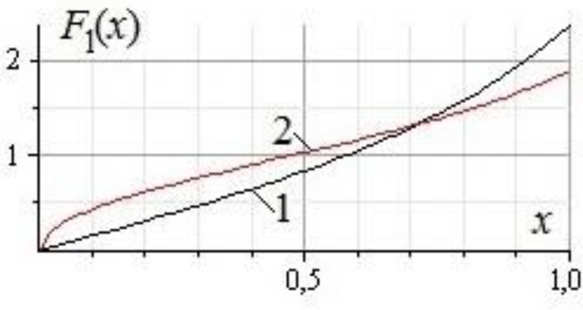

Рисунок 5 – Власна функція диференційного рівняння $F_1(x)$ при $\beta = 3$ та коефіцієнтах Пуассона: 1) $\mu = 0$; 2) $\mu = 0,5$

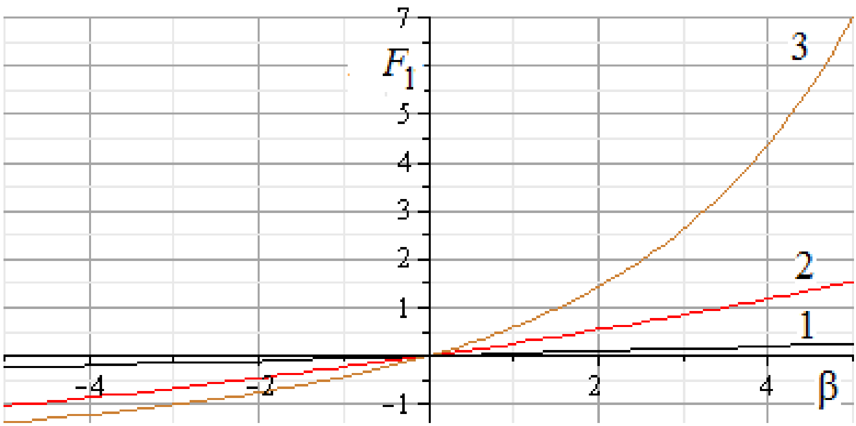

Рисунок 6 – Власна функція диференційного рівняння $F_1(x)$ при фіксованих значеннях аргументу: 1) $x = 0,1$; 2) $x = 0,5$; 3) $x = 1,0$

Висновки:

У роботі запропоновано методику одержання точного розв'язку задачі вигину круглої пластини, товщина якої змінюється в радіальному напрямку за експоненційним законом. Розв'язок одержано із використанням функцій Уіттекера. Проведено дослідження характеру залежності товщини пластини від параметру нерівномірності її товщини. Визначено характер і область значень власних функцій диференційного рівняння прогину круглої пластини змінної товщини.

Список використаних джерел: 1. *Петров В.В.* Решение нелинейных задач строительной механики методом наискорейшего спуска / *В.В. Петров* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – V. 13. – №3. – P. 103-111. **2.** Численные методы решения задач строительной механики: справ. пособие / *В.П. Ильин [и др.]*. – Минск: Высшая школа, 1990. – 349 с. **3.** *Мищенко Р.В., Пименов Д.А.* Расчет неоднородных пластин переменной толщины методом наискорейшего спуска [Электронный ресурс] // Вестник Евразийской науки. – 2018. – №1. Режим доступа https://esj.today/PDF/43SAVN118.pdf **4.** *Гордон В.А., Брусова В.И.* Осесимметричные деформации круглой пластинки переменной толщины с центральным жестким включением / *В.А. Гордон, В.И. Брусова* // Изв. Тульского гос. ун-та. Технические науки, 2008. – №1. – С. 127-136. **5.** *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки / *С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер.* – М.: Наука, 1966. – 636 с. **6.** *Григоренко Я.М.* Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності: підручник / *Я.М. Григоренко, Л.В. Мольченко.* – К.: Вид.-поліграф. центр «Київський університет», 2009. – 403 с. **7.** *Коренева Е.Б.* Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения / *Е.Б. Коренева.* – М.: Изд-во Асс. строит. вузов, 2009. – 240 с. **8.** *Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д.* Расчет пластин / *Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг.* – К.: Будівельник, 1970. – 436 с.

Yuriy Khomiak, Inna Yarova, Odesa, Ukraine

CALCULATION OF THE VARIETY OF THE PLAN OF CHANGING EQUIPMENT USING WITTECER FUNCTIONS

Abstract. *Vertical cylindrical vessels and reservoirs have a large number of applications in different industries. Modernization of their construction by optimizing of structural components form is one of the most* urgent priorities. Reduction of material consumption *of the structure and reduction of internal stresses can be achieved by replacing of flat vessel bottoms with variable thickness vessel bottoms. Such bottoms are manufactured by stamping or by molding. At strength analysis vessel bottoms are considered as loaded round plates. Their stresses and strains can be described with equations of plate theory and can be find with analytical methods. The problem of bending of rigidly fixed variable thickness round plates is examined in the article. It is suggested that the plates are* made of general-purpose constructional steel. *It has been* suggested *by the* authors *that thickness of round plates* increases or decreases in a radial direction *exponentially, but is a constant* in a circular direction. *Therefore, plate deformations are axesymmetrical. Authors have introduced the new parameter that describes the radial variability of round plate thickness. The suggested parameter is provided in order to describe deformations of plano-convex, plano-concave,* double convex *and double concave plates. The graphical relationships between plate thickness and radial coordinate for a several number of parameter value are presented in the research. Differential equation of 4-th order for axesymmetrical deformation of round plate with exponential decrease of thickness is obtained. The equation takes into account the material properties of the round plate, its dimensions and conditions of load application. The analytic problem-solving procedure using special functions has been developed. The Whittaker functions have been selected as the special functions. The exact solution to the problem for axesymmetrically loaded round plate with exponentially variable thickness is obtained. The character and the domain of eigen functions of the differential equation are determined, the plots of eigen functions are developed. The analysis of the problem solutions with different values of the parameter of plate thickness radial variability is carried out.*

Keywords: *round plate, variable thickness, axisymmetric loading, bending.*